Theorie der Wärmeleitung in einem homogenen, schalenförmigen Körper, der von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Kgl. bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Franz Dolberg
aus Wismar (Mecklbg.).

München.
Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Lossen.
1900.

Theorie der Wärmeleitung in einem homogenen, schalenförmigen Körper, der von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Kgl. bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Franz Dolberg
aus Wismar (Mecklbg.).

ACAD. LUDOVIC. BIBL.

München.
Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Lossen.
1900.

Meinen lieben Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548318_0048

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. L. Graetz für die freundliche Anregung zu dieser Arbeit und für das rege Interesse, welches er derselben entgegenbrachte, sowie Herrn Prof. Dr. F. Lindemann für die freundlichst mir erteilten Ratschläge meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Die Aufgabe, die Wärmeleitung in einem homogenen Körper zu untersuchen, der von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird, ist naturgemäss erst durch Festlegung der Grenzbedingungen vollständig und eindeutig bestimmt. Es wird sich demgemäss, da man diese Grenzbedingungen in mannigfaltiger Weise combinieren und festlegen kann, die obige allgemeine Aufgabe in Gruppen zerlegen lassen, von denen besonders folgende zwei vom theoretischen, wie vom praktischen Standpunkt aus einige Bedeutung haben dürften:

I. Die Grenzflächen d. h. die excentrisch liegenden Kugelflächen stehen mit beliebig gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Berührung. In diesem Falle wird man natürlich von einer Wärmeleitung im weiteren Sinne in dem von den beiden Kugelflächen eingeschlossenen Körper nicht reden können, sondern nur den stationären Temperaturzustand aufzusuchen haben. Die diesbezügliche Auflösung mit Hilfe der dipolaren Coordinaten ist in einer sehr allgemeinen und umfassenden Arbeit*) von C. Neumann gegeben.

II. Die Grenzflächen stehen mit beliebig gegebenen, aber mit der Zeit veränderlichen Wärmequellen in Berührung. Es ist die Wärmeleitung in dem schalenförmigen Körper zu untersuchen.

Mit dieser letzten Aufgabe der Wärmeleitung werden wir uns im folgenden in der Hauptsache zu beschäftigen haben. Dabei wird natürlich nach Fourier die Homogenität des leitenden Körpers

*) Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle 1862.

vorausgesetzt und die Ausdehnung desselben durch die Wärme vernachlässigt. Sodann wird für die folgende Behandlung noch die Annahme gemacht, dass die beiden Kugelflächen sich nicht berühren, sonst aber beliebig excentrisch liegen können. Es lässt sich der Fall der Wärmeleitung bei zwei von innen sich berührenden Kugeln zwar leicht als Grenzfall des zu behandelnden Problemes darstellen, er soll aber im folgenden, wie schon gesagt, immer ausgeschlossen bleiben.

Trotzdem unsere zu behandelnde Aufgabe wohl in erster Linie ein rein theoretisches Interesse beansprucht, ist die Lösung derselben aber auch für die experimentelle Physik nicht ganz unwichtig. Bei Bestimmung der absoluten Wärmeleitungskonstanten der Gasen, speziell der Luft kann sie sogar von ziemlicher Bedeutung werden, wie kurz dargelegt werden möge:

In einer Arbeit*) von E. Müller findet man folgende Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungskonstanten der Luft angegeben:

Man hat drei Kugeln (r), (R_2), (R_1) mit den Radien bezw. r, R_2, R_1, wo $r < R_2 < R_1$ ist. In die mit Quecksilber gefüllte Aluminiumkugel (r) wird das Gefäss eines Thermometers eingelassen, dessen Stiel die Kugelfläche durchsetzt. Die Kugel (r) kann mit der kleinen Hülle (Kugel (R_2)) in eine concentrische, mit der grossen Hülle (Kugel (R_1)) in eine excentrische Lage gebracht werden. Die äussere Hülle wird in ein Bad von 0^0 gebracht, die Abkühlungszeiten des auf eine beliebige hohe Temperatur gebrachten Quecksilbers am Thermometer abgelesen. Es möge bezeichnen:

k die Wärmeleitungskonstante der Luft,
w Wasserwert der Aluminiumkugel (r) incl. Quecksilber, Glas u.s.w.,
v die Abkühlungskonstante des Apparates,
σ Strahlungskonstante des Aluminiums,
g und g' zwei Correktionsglieder, deren Wert durch die innere resp. äussere Wärmeleitungsfähigkeit des Thermometerstieles bestimmt sind.

g' kann man äusserst klein machen, ist also zu vernachlässigen. Es gelten dann, wenn man die Aluminiumkugel zuerst mit der einen, sodann mit der andern der beiden genannten Hüllen

*) E. Müller, Wied. Ann. 60. S. 93 u. ff.

in der oben angegebenen Weise umgiebt und dann jedesmal die Abkühlungskonstante, die in dem einen Fall v_1 in dem andern v_2 heissen möge, bestimmt, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} w \,.\, v_1 &= k \cdot f\,(R_1 r) + \sigma \cdot 4\,\pi\, r^2 + g \\ w \,.\, v_2 &= k \cdot \frac{4\,\pi\, R_2\, r}{R_2 - r} + \sigma \cdot 4\,\pi\, r^2 + g \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Daraus ergibt sich:

$$k = \frac{w \cdot (v_2 - v_1) \cdot (R_2 - r)}{4\, R_2 \cdot r - f(R_1\, r) \cdot (R_2 - r)} \quad \text{(b).}$$

Auf der rechten Seite sind dann alle Werte mit Ausnahme der Funktion $f\,(R_1,\, r)$ teils bekannt, teils durch Versuche bestimmbar. Diese unbekannte Funktion $f\,(R_1\, r)$ kann man zwar dadurch eliminieren, dass man dieselben Versuche, die man mit Luft angestellt hat, mit einem anderen Gas von der Wärmeleitungsfähigkeit k' (E. Müller nimmt Wasserstoff) wiederholt. Es treten dann zu den obigen Gleichungen (a) noch zwei analoge Ausdrücke hinzu. Aus diesen in Verbindung mit den Gleichungen (a) ist dann die gewünschte Elimination zu bewerkstelligen. Diese Methode erfordert aber wieder äusserst subtile und genaue Versuche mit dem zweiten Gas von der Wärmeleitungsfähigkeit k', so dass es vorteilhafter erscheint, die Funktion $f\,(R_1\, r)$ direkt zu bestimmen. Hierdurch werden wir dann auf unsere zu behandelnde Aufgabe geführt, die aber freilich in diesem Falle in etwas modificierter Form auftritt. Das eigentliche Problem für den obigen Fall lautet nämlich folgendermassen:

Die äussere Kugel behält eine konstante Temperatur, die innere Kugel giebt die in ihr enthaltene Wärmemenge ab. Es ist dann die mit der Zeit veränderliche Temperatur der inneren Kugelfläche gesucht, wenn die ganze, zur Zeit t in der inneren Kugel enthaltene Wärmemenge gegeben ist.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist nun wieder die Behandlung des folgenden Problemes von Wichtigkeit:

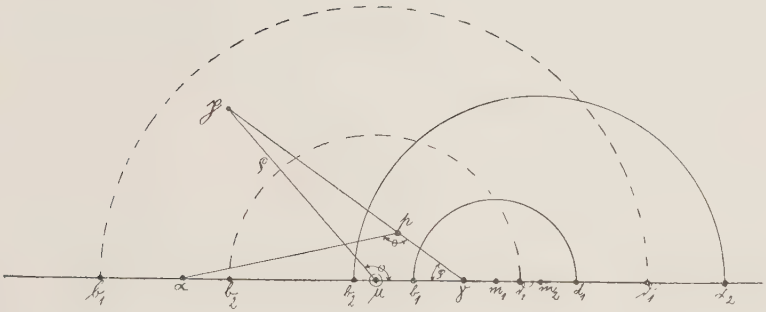
Es ist die Wärmeleitung in einem von zwei nicht concentrisch liegenden Kugelflächen begrenzten Medium zu untersuchen, wenn die innere Grenzfläche mit einer beliebig gegebenen, mit der Zeit veränderlichen Wärmequelle, die äussere Grenzfläche mit einer constanten Wärmequelle in Berührung steht.

Wir werden im folgenden die genannten beiden Aufgaben der Wärmeleitung, nämlich erstens die allgemeine, bei der beide Grenzflächen mit gegebenen, mit der Zeit veränderlichen Wärmequellen in Berührung stehen, zweitens die spezielle, bei der die innere Grenzfläche mit einer gegebenen, mit der Zeit veränderlichen Wärmequelle, die äussere mit einer constanten Wärmequelle in Berührung steht, gemeinsam zu lösen versuchen.

Um später den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, werde ich zuvörderst in aller Kürze einige auf unsern Fall von zwei excentrisch in einanderliegenden, sich nicht berührenden Kugeln sich beziehende Bemerkungen über die Methode der reciproken radii vectores von W. Thomson zusammenstellen. Ich schliesse mich hier, auch in der Bezeichnungsweise, Heines Handbuch der Kugelfunktionen Bd. II an. So wird z. B. stets der abzubildende Gegenstand mit einem römischen Buchstaben (p), das Bild mit dem entsprechenden deutschen (p) belegt. In ähnlicher Weise sei die Entfernung des Gegenstandes und des Bildes von dem Punkt, von welchem aus abgebildet wird, mit z. B. r resp. r bezeichnet, so dass das Princip der Abbildung durch die Gleichung $r \cdot \mathrm{r} = 1$*) ausgedrückt werden kann.

Bezeichnet m_1 den Mittelpunkt der kleineren, m_2 denjenigen der grösseren Kugel, so kann man einen Punkt γ auf der Linie $m_1 m_2$ so bestimmen, dass die Bilder der beiden Kugeln m_1 und m_2, die ja auch wieder Kugeln sind, concentrisch werden. Man erkennt leicht, dass der eine Punkt des Punktepaares α, γ, welches sowohl mit dem Punktepaar b_1, d_1, als auch mit dem Punktepaar b_2, d_2 harmonisch liegt, in unserem Falle γ der gesuchte Punkt sein muss. Die Bedeutung der Buchstaben geht ohne weiteres aus der auf Seite 5 stehenden Figur hervor. Bildet man also die gegebenen excentrisch liegenden Kugeln m_1 und m_2 von γ aus ab, so erhält man zwei concentrisch liegende Kugeln mit dem Mittelpunkte μ, der auf der Verlängerung der Centralen $m_1 m_2$ liegt. Es sind gegeben die Radien a_1 und a_2 der Kugeln m_1 und m_2, ausserdem die Centrale $m_1 m_2 = c$, wo in unserem Falle $c < a_2 - a_1$ ist. Aus diesen Grössen lassen sich die Lagen der festen Punkte α, γ und μ bestimmen.

*) Thomson setzt bekanntlich $r \cdot \mathrm{r} = a^2$, wo a beliebig ist.



$$b_1 m_1 = d_1 m_1 = a_1;\ b_2 m_2 = d_2 m_2 = a_2;\ m_1 m_2 = c$$
$$\gamma p = r;\ \gamma \mathfrak{p} = \mathfrak{r};\ r \cdot \mathfrak{r} = 1 \cdot;\ \mu \mathfrak{p} = \rho \cdot$$
$$\sphericalangle \mathfrak{p} \mu \gamma = \sphericalangle \alpha p \gamma = \Theta;\ \sphericalangle \mu \gamma p = \zeta$$

Die Ableitung der folgenden Formeln, die übrigens leicht zu verificieren sind, mögen übergangen werden. Man setze:

$$\pm \frac{a_1^2 + c^2 - a_2^2}{2 c a_1} = \cos \sigma_1 i;\ \pm \frac{a_2^2 + c^2 - a_1^2}{2 c a_2} = \cos \sigma_2 i$$

Die doppelten Zeichen auf der linken Seite sind so zu verstehen, dass die betreffenden Ausdrücke immer positiv zu nehmen sind. Für σ_1 und σ_2 wählen wir in unserem Falle das positive Zeichen. Es ist dann:

$$\gamma m_1 = a_1 e^{-\sigma_1},\ \alpha m_1 = a_1 e^{\sigma_1}$$

$$\alpha b_1 = \gamma b_1 \cdot e^{\sigma_1},\ \alpha d_1 = \gamma d_1 \cdot e^{\sigma_1}$$

und analoge Ausdrücke, wenn man für den Index 1 den Index 2 setzt.

$$\alpha \gamma = \frac{1}{\gamma \mu} = 2 k = a_1 \left(e^{\sigma_1} - e^{-\sigma_1} \right) = a_2 \left(e^{\sigma_2} - e^{-\sigma_2} \right).$$

Wir führen jetzt die Thomson'schen dipolaren Coordinaten σ und Θ ein, indem wir einen Punkt p im Raume folgendermassen bestimmen:

a) Durch den Winkel ψ, den die durch p gelegte Meridianebene mit einer festen macht $(0 < \psi < 2\pi)$

b) durch das Verhältnis der Linien αp und γp, indem man setzt:

$$\frac{\alpha p}{\gamma p} = e^{\sigma}$$

c) durch den Winkel

$$\sphericalangle \alpha p \gamma = \sphericalangle \mathfrak{p} \mu \gamma = \Theta \cdot$$
$$(0 < \Theta < \pi) \cdot$$

Soll durch diese Coordinaten ein Punkt p im Raume eindeutig bestimmt sein, so muss folgendes beachtet werden. Unter den Meridianebenen $\psi = \text{Const.}$ sind die durch die Achse $\alpha\gamma$ begrenzten Halbmeridianebenen zu verstehen. Es stellt dann die Gleichung $\Theta = \text{Const.}$ $(0 < \Theta < \pi)$ ein System von Rotationsflächen dar, deren Schnitte mit den (Halb-) Meridianebenen Kreisbögen sind, die durch die Linie $\alpha\gamma$ als gemeinschaftliche Sehne begrenzt sind. Es stellt endlich die Gleichung $\sigma = \text{Const.}$ ein System von Kugeln dar, deren Schnitte mit den (Halb-) Meridianebenen Halbkreise sind. Denkt man sich die letzteren zu Vollkreisen ergänzt, so schneiden diese die Achse in solchen Punkten b, d, die mit dem Punktenpaar α, γ harmonisch sind. Die Kugelflächen des constanten σ schneiden die Flächen des constanten Θ orthogonal.

Allgemein durchläuft σ alle Werte des Intervalles $-\infty$ bis $+\infty$. Wir aber haben es in unserem speciellen Falle nur mit zwei ineinanderliegenden, sich weder berührenden noch schneidenden Kugeln zu thun. Dabei schliessen wir natürlich auch den Fall des Unendlichgrosswerdens der äusseren Kugel aus. Dieses tritt z. B. ein, wenn $\sigma = 0$ wird, also $\alpha p = \gamma p$ (Siehe die Figur). Dann reduciert sich die Kugel auf eine durch die Mitte von $\alpha\gamma$ und senkrecht zu dieser Linie gelegte Ebene. Rechts von dieser Ebene liegen alle den Punkt γ einschliessende und durch einen zwischen 0 und $+\infty$ liegenden, also positiven Wert von σ charakterisierten Kugeln. Links von der betreffenden Ebene liegen alle den Punkt α einschliessende Kugeln, die durch negative, zwischen 0 und $-\infty$ liegende Werte von σ bestimmt werden. Zwei ineinanderliegende, sich weder berührende noch schneidende Kugeln werden also hiernach entweder durch 2 positive oder 2 negative Werte von σ festgelegt. Wie wir oben schon erwähnt haben, wählen wir für die Bestimmung der Kugeln das positive Zeichen von σ.

Mit Hülfe der dipolaren Coordinaten lassen sich leicht folgende Gleichungen aufstellen, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\sqrt{\cos i\sigma - \cos\Theta} = (\sigma, \Theta),:$$

$$2k\rho = e^{\sigma}, r = \gamma p = \frac{k\sqrt{2}}{(\sigma,\Theta)} e^{-\frac{1}{2}\sigma} = \frac{1}{(\sigma,\Theta)} \cdot \sqrt{\frac{k}{\rho}};$$

$$\mathrm{r} = \frac{1}{r} = \frac{(\sigma,\Theta)}{k\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}\sigma}.$$

Es sei die Mitte zwischen α und γ der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die positive Richtung der x Achse gebe die vom Anfangspunkt nach m_2 gezogene Linie an, die y Achse liege in der halben Meridianebene, die $\psi = O$, die z Achse in derjenigen, die $\psi = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, dann wird der Zusammenhang der rechtwinkligen mit den dipolaren Coordinaten durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = -\frac{k\,i \sin i\sigma}{(\sigma,\Theta)^2}; \quad y = \frac{k \sin\Theta \cdot \cos\psi}{(\sigma,\Theta)^2}; \quad z = \frac{k \sin\Theta \cdot \sin\psi}{(\sigma,\Theta)^2}$$

Das Quadrat des Linienelementes wird durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{k^2}{(\sigma,\Theta)^4}(d\sigma^2 + d\Theta^2 + \sin^2\Theta \cdot d\psi^2)$$

Macht man schliesslich noch γ zum Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems r, ζ, ψ, so lassen sich diese Grössen durch die dipolaren Coordinaten folgendermassen ausdrücken:

$$r = \frac{k\sqrt{2}}{(\sigma,\Theta)} e^{-\frac{1}{2}\sigma}.$$

$$\cos\zeta = \frac{1 - e^{\sigma}\cos\Theta}{\sqrt{2}\cdot(\sigma,\Theta)} e^{-\frac{1}{2}\sigma}; \quad \sin\zeta = \frac{\sin\Theta}{\sqrt{2}\cdot(\sigma,\Theta)} e^{\frac{1}{2}\sigma};$$

$$\psi = \psi\cdot$$

Am Schlusse dieser einleitenden Bemerkungen möge noch folgender Satz über die Abbildung des Potentials angeführt werden.

Man soll das Potential v finden, welches sich auf der einen von zwei gegebenen Flächen in die gegebene Funktion $v_1 = \chi_1(\zeta\,\psi)$, auf der andern in die gegebene Funktion $v_2 = \chi_2(\zeta\,\psi)$ verwandelt.

Man wählt einen Punkt γ, den man zum Anfangspunkt der Polarcoordinaten r, ζ, ψ macht, von dem aus man auch die beiden gegebenen Flächen abbildet.

Es wird dann das Potential $\mathfrak{v}$ gesucht, welches sich auf der einen Bildfläche in

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{1}{\mathfrak{r}_1}\, v_1 = \frac{1}{\mathfrak{r}_1} \cdot \chi_1(\zeta\psi),$$

auf der andern Bildfläche in

$$\mathfrak{v}_2 = \frac{1}{\mathfrak{r}_2} \cdot v_2 = \frac{1}{\mathfrak{r}_2} \cdot \chi_2(\zeta\,\psi)$$

verwandelt.

Ist dieses gefunden, und erhält man für dasselbe in dem Punkte $\mathfrak{p} = (\mathfrak{r},\ \zeta,\ \psi)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r},\ \zeta,\ \psi,)$$

so wird das gesuchte Potential in dem Punkte p:

$$v = \frac{1}{r} f\left(\frac{1}{r}, \zeta, \psi\right) = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zu unserer Aufgabe über.

Unsere Aufgabe lautet in allgemeiner Form:

Es ist eine Funktion T von den Coordinaten r, ζ, ψ und der Zeit t so zu bestimmen, dass T

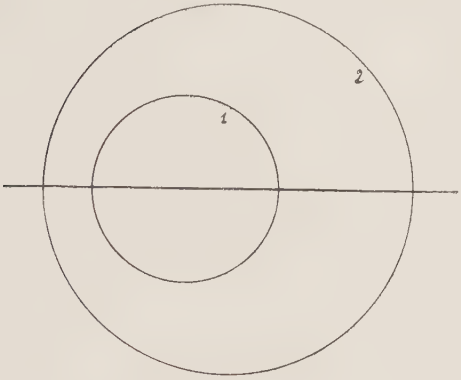
I. der Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta\, T \text{ genügt,}$$

II. für $t = 0$ in $T = f(r, \zeta, \psi)$ übergeht, wo f eine gegebene Funktion bedeutet,

III. an den Begrenzungsflächen 1 und 2 in die gegebenen Funktionen

$T_1 = \varphi_1(\zeta, \psi\, t)$
$T_2 = \varphi_2(\zeta, \psi\, t)$ resp.
$T_2 = C$ übergeht,



IV. die folgenden Bedingungen erfüllt:

T muss differentiierbar sein, T und seine Differentialquotienten müssen nach jeder Richtung im ganzen betrachteten Raum, und zwar T bis in, die Differentialquotienten nur bis an die Begrenzungsflächen, endlich und stetig bleiben.

Durch die Bedingungen I—IV ist die Funktion T eindeutig bestimmt. Nach allgemeiner Bezeichnungsweise nennen wir die Bedingung I die „Hauptbedingung", II und III die „Nebenbedingungen". Die jedesmalige Anführung der Bedingung IV, deren Erfülltsein die Bedingungen I — III voraussetzen, unterlassen wir der Kürze halber. Man setze

$$T = u + v,$$

indem die Bedingungen, denen T unterworfen ist, auf u und v folgendermassen verteilt werden:

Allgemeine Aufgabe.	Spezielle Aufgabe.
A) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u$	$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u$
B) $u = o$ für $t = o$	$u = o$ für $t = o$
C) $\begin{cases} u_1 = \varphi_1(\zeta\, \psi\, t) \\ u_2 = \varphi_2(\zeta\, \psi\, t) \end{cases}$	$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(\zeta\, \psi\, t) \\ u_2 = C \cdot \end{cases}$

$$A_1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta v$$

$$B_1) \quad v = f(r\,\zeta\,\psi) \text{ für } t = o$$

$$C_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = o \\ v_2 = o \end{array} \right.$$

Die mit den Indices versehenen Teiltemperaturen beziehen sich natürlich auf die entsprechenden Grenzflächen. Die Aufgabe, v zu ermitteln, lässt sich nicht weiter reducieren, wohl aber diejenige, u zu ermitteln. Nehmen wir zunächst die allgemeine Aufgabe, bei welcher für die Nebenbedingungen C) die Grenzgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \varphi_1(\zeta\,\psi\,t) \\ u_2 = \varphi_2(\zeta\,\psi\,t) \end{array} \right\}$$

statthaben, so kann man bei der Aufsuchung der Teiltemperatur u bekanntlich die vereinfachende Voraussetzung machen, dass die Funktionen φ_1 und φ_2 von t unabhängig sind. Bedeutet nämlich λ eine Zahl zwischen o und t, und genügt die Funktion $u' = \chi(r, \zeta, \psi, \lambda, t)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u', \qquad (\alpha)$$

wird für $t = o$ auch $u' = o$, $\qquad (\beta)$

und geht an den Begrenzungsflächen u' über in

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1' = \varphi_1(\zeta\,\psi\,\lambda) \\ u_2' = \varphi_2(\zeta\,\psi\,\lambda) \end{array} \right\} (\gamma)$$

so wird die gesuchte Temperatur

$$u = \int_o^t \frac{\partial \chi(r, \zeta, \psi, \lambda, t-\lambda)}{\partial t} \cdot d\lambda \quad ^{*)}$$

*) Siehe: Heine, Hdbch. d. Kugelfkt. p. 312 u. ff. B. Riemann, partielle Differentialgleich. Brschwg. 1862 p. 131 u. ff.

Sobald also u' bekannt ist, ist es auch u. u' zerlegt man in $u' = \xi + \eta$, indem man die Bedingungen $(\alpha - \gamma)$, denen u' unterworfen ist, auf ξ und η, wie folgt verteilt:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad o = \Delta\,\xi \\ &\text{c)} \quad \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(\zeta\,\psi\,\lambda) \\ \xi_2 = \varphi_2(\zeta\,\psi\,\lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{a}_1) \quad \frac{\partial\,\eta}{\partial\,t} = a^2 \cdot \Delta\,\eta \\ &\text{b}_1) \quad \eta = -\xi \text{ für } t = o \\ &\text{c}_1) \quad \begin{cases} \eta_1 = o \\ \eta_2 = o \end{cases} \end{aligned}$$

Hiernach hat ξ die Bedingungen eines Flächenpotentiales zu erfüllen, η ist durch dieselben Bedingungen bestimmt, durch die die obige Teiltemperatur v bestimmt war, da es natürlich unwesentlich ist, ob der Wert für $t = o$ eine gegebene Funktion oder das Resultat einer zu lösenden Potentialaufgabe ist. Um also die gesuchte Temperaturfunktion T der allgemeinen Aufgabe zu finden, müssen wir in der Hauptsache die Lösung folgender 2 Aufgaben bewerkstelligen:

1. Es ist das Potential V eines von zwei excentrisch liegenden Kugelflächen eingeschlossenen Raumes, das auf den Begrenzungsflächen gegebene Werte annimmt, zu bestimmen.
2. Es ist eine Funktion w zu bestimmen, die innerhalb dieses Raumes der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\,w}{\partial\,t} = a^2 \cdot \Delta\,w$$

genügt, die ausserdem für $t = o$ in $w = f(r, \zeta, \psi)$ und an den Begrenzungsflächen in $w_1 = w_2 = o$ übergeht. $f(r, \zeta, \psi)$ bedeutet eine beliebig gegebene, continuierliche Funktion.

Wir müssen noch die Reducierung der speciellen Aufgabe vornehmen:

$$\begin{aligned} &\text{A)} \quad \frac{\partial\,u}{\partial\,t} = a^2 \cdot \Delta\,u \\ &\text{B)} \quad u = o \text{ für } t = o \\ &\text{C)} \quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(\zeta\,\psi\,t) \\ u_2 = C. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir wählen hier folgende Methode. Man setze:

$$u = p + q$$

indem man die Bedingungen (A — C) auf p und q, wie folgt verteilt:

$$\text{D)} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta p$$

$$\text{E)} \quad p = o \text{ für } t = o$$

$$\text{F)} \quad \begin{cases} p_1 = \varphi_1 (\zeta \psi t) \\ p_2 = o \end{cases}$$

$$\text{D}^1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta q$$

$$\text{E}^1) \quad q = o \text{ für } t = o$$

$$\text{F}^1) \quad \begin{cases} q_1 = o \\ q_2 = C \end{cases}$$

Wir haben also die beiden Aufgaben, die Partialtemperaturen p und q zu ermitteln. Dieselben lassen sich noch weiter reducieren, und zwar die erste in analoger Weise, wie vorher bei der allgemeinen Aufgabe u durch ξ und η bestimmt ist. Die Funktion

$$u'' = \chi' (r, \zeta, \psi, \lambda, t),$$

wo λ wieder eine Zahl zwischen 0 und t bedeutet, genüge den Bedingungen:

$$\alpha^1) \quad \frac{\partial u''}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u''$$

$$\beta^1) \quad u'' = o \text{ für } t = o$$

$$\gamma^1) \quad \begin{cases} u_1'' = \varphi_1 (\zeta \psi \lambda) \\ u_2'' = o \end{cases}$$

Die Indices 1 und 2 beziehen sich, wie vorher, auf die entsprechenden Grenzflächen. Die Teiltemperatur p der speciellen Aufgabe ergiebt sich dann aus der Gleichung:

$$p = \int_o^t \frac{\partial \chi' (r, \zeta, \psi, \lambda, t - \lambda)}{\partial t} \cdot d\lambda$$

Zur Bestimmung von u'' setze man:

$$u'' = \xi' + \eta'.$$

Wir verteilen die Bedingungen $(\alpha^1 - \gamma^1)$ folgendermassen:

$$\left.\begin{array}{l} o = \Delta\,\xi' \\ \left.\begin{array}{l} \xi_1' = \varphi_1\,(\xi\,\psi\,\lambda) \\ \xi_2' = o \end{array}\right\} \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\,\eta'}{\partial\,t} = a^2 \cdot \Delta\,\eta' \\ \eta' = -\xi' \text{ für } t = o \\ \eta_1' = o \\ \eta_2' = o \end{array}\right|$$

Die Aufgabe, η' zu ermitteln, ist identisch mit der Aufgabe 2. Ebenso ist die Aufgabe ξ' zu bestimmen, identisch mit der Aufgabe 1, wenn man für die gegebenen Werte, welche das Potential auf den Begrenzungsflächen annehmen soll, auch den Wert 0 zulässt.

Es bleibt endlich noch die Reducierung folgender Aufgabe übrig:

Es ist die Partialtemperatur q, die die Bedingungen $D^1) - F^1)$ zu erfüllen hat, zu ermitteln.

Zu diesem Ende setze man:

$$q = q' + q''$$

Die Bedingungen, denen q unterworfen ist, verteilt man auf q' und q'' folgendermassen:

$$\begin{array}{ll} \Delta\,q' = o & \dfrac{\partial\,q''}{\partial\,t} = a^2 \cdot \Delta\,q'' \\ q_1' = o & q'' = -q' \text{ für } t = o \\ q_2' = C & q''_1 = q''_2 = o. \end{array}$$

Die Identität der Aufgaben, die Funktionen q' und q'' zu zu bestimmen, mit den Aufgaben 1 und 2 ist ersichtlich.

Um also unsere beiden Aufgaben, die allgemeine und specielle, lösen zu können, sind wir auf die Behandlung folgender zwei Aufgaben angewiesen:

I. Es ist das Potential V eines von zwei excentrisch liegenden Kugelflächen eingeschlossenen Raumes zu bestimmen, das entweder auf beiden Begrenzungsflächen gegebene Werte annimmt, oder auf der einen Begrenzungsfläche einen gegebenen Wert erhält, auf der andern zu Null wird.

II. Es ist eine Funktion w von den Polarcoordinaten $r\,\zeta\,\psi$ und der Zeit t zu bestimmen, die innerhalb dieses Raumes der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta w$$

Genüge leistet und so beschaffen ist, dass

$$\text{für } t = 0 \quad w = f\,(r\,\zeta\,\psi)$$

wird, dass ferner an den Begrenzungsflächen w den Wert Null annimmt.

Sobald also die Aufgaben I und II gelöst sind, sind auch unsere beiden in der Einleitung aufgestellten Aufgaben als gelöst zu betrachten. Wir beginnen mit der Behandlung von I.

I.

Aufsuchen der Potentialausdrücke.

Die Lösung unserer ersten Aufgabe, bei welcher zunächst das Potential an den Begrenzungsflächen gegebene, von Null verschiedene Werte annehmen möge, lässt sich mit Hülfe der Abbildung nach der Methode der reciproken radii vectores leicht durchführen. Dieselbe ist auch schon von Thomson angedeutet, in voller Allgemeinheit aber erst von C. Neumann in der eingangs erwähnten Arbeit gegeben. Der Vollständigkeit halber möge hier die Lösung, und zwar im Anschluss an Heines Handbuch der Kugelfunktionen Bd. II reproduciert werden, was infolge der einleitenden Bemerkungen in aller Kürze geschehen kann.

Man lege die Punkte α und γ fest, bilde von γ die beiden excentrisch liegenden Kugeln concentrisch ab, führe in die bekannten Funktionen, in welche das Potential an den gegebenen Begrenzungsflächen übergehen soll, die dipolaren Coordinaten σ und Θ ein, so dass

$$V = V_1(\Theta, \psi) \text{ für } \sigma_1$$
$$V = V_2(\Theta, \psi) \text{ für } \sigma_2 \text{ wird.}$$

Die Bilder der Grenzflächen sind concentrische Kugeln mit dem Mittelpunkte μ und den Radien

$$\rho_1 = \frac{e^{\sigma_1}}{2k} \text{ und } \rho_2 = \frac{e^{\sigma_2}}{2k}.$$

Wir haben dann ein Potential $\mathfrak{V}$ in Bezug auf die Polarcoordinaten ρ, Θ, ψ aufzusuchen, das sich bezw. in

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_1 &= \frac{1}{r_1} V_1(\Theta, \psi) = \frac{k\sqrt{2}}{(\sigma_1, \Theta)} V_1(\Theta\,\psi)\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_1} \text{ für } \rho_1 = \frac{e^{\sigma_1}}{2k} \\ \mathfrak{V}_2 &= \frac{1}{r_2} V_2(\Theta, \psi) = \frac{k\sqrt{2}}{(\sigma_2, \Theta)} V_2(\Theta\,\psi)\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_2} \text{ für } \rho_2 = \frac{e^{\sigma_2}}{2k} \end{aligned}\right| \quad 1.$$

verwandelt. Das gesuchte Potential V wird

$$V = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{V} = \frac{(\sigma, \Theta)}{k\sqrt{2}} \mathfrak{V} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma}. \qquad 2.$$

Das Potential v einer von zwei concentrisch liegenden Kugelflächen begrenzten Schale, welches auf der inneren Begrenzungsfläche, also für $r = r_1$ in $v = f_1(\Theta\,\psi)$, auf der äusseren Begrenzungfläche für $r = r_2$ in $v = f_2(\Theta\,\psi)$ übergehen soll, wenn man noch zur Abkürzung setzt:

$$\log r = \sigma,\ \log r_1 = \sigma_1$$
$$\log r_2 = \sigma_2,\ n + \tfrac{1}{2} = \nu$$

ist bekanntlich gegeben durch folgende Gleichung:*)

$$v = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r}} n \sum_0^\infty \frac{\sin \nu\, i\,(\sigma - \sigma_1)}{\sin \nu \cdot i\,(\sigma_2 - \sigma_1)} Y_2^n + \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r}} n \sum_0^\infty \frac{\sin \nu \cdot i\,(\sigma - \sigma_2)}{\sin \nu \cdot i\,(\sigma_1 - \sigma_2)} Y_1^n. \qquad 3.$$

Man entwickle also V_1 und V_2 folgendermassen:

$$V_1(\Theta\,\psi) = (\sigma_1, \Theta)\, n \sum_0^\infty Y_1^n(\Theta\,\psi)$$

$$V_2(\Theta\,\psi) = (\sigma_2, \Theta)\, n \sum_0^\infty Y_2^n(\Theta\,\psi),$$

beachte die obenstehenden Ausdrücke (1, 2, 3,) und man erhält durch eine einfache Substitution die Gleichung für den gesuchten, den verlangten Bedingungen genügenden Potentialwert ausgedrückt durch die dipolaren Coordinaten σ, Θ, ψ:

$$V = (\sigma, \Theta)\, n \sum_0^\infty \frac{\sin \nu\, i\,(\sigma - \sigma_1)}{\sin \nu\, i\,(\sigma_2 - \sigma_1)} Y_2^n(\Theta, \psi) + \frac{\sin \nu\, i\,(\sigma - \sigma_2)}{\sin \nu\, i\,(\sigma_1 - \sigma_2)} Y_1^n(\Theta\,\psi) \cdot \qquad 4.$$

wo wieder $\nu = n + \frac{1}{2}$ gesetzt ist. Zwischen den σ Werten besteht die Beziehung:

$$\sigma_2 < \sigma < \sigma_1.$$

*) Siehe Heine, Hdbch. d. Kugelfkt. Bd. II. p. 72.

Die zweite Potentialaufgabe, bei welcher das Potential an der innern Kugelfläche den Wert V_1, an der äussern den Wert Null annehmen soll, lässt sich nun nach dem Vorhergehenden leicht lösen. Man hat $V_2 = o$ zu setzen. Also:

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{r_1} V_1(\Theta\,\psi) = \frac{k \cdot \sqrt{2}}{(\sigma_1, \Theta)} \cdot V_1(\Theta\,\psi)\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_1} \quad \text{für } \rho_1 = \frac{e^{\sigma_1}}{2k}$$

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{1}{r_2} \cdot V_2(\Theta\,\psi) = o \qquad \text{für } \rho_2 = \frac{e^{\sigma_2}}{2k} \qquad 1'.$$

Entwickelt man wieder V_1, wie folgt, nach Kugelfunktionen:

$$V_1(\Theta\,\psi) = (\sigma_1, \Theta) \cdot n \sum_{o}^{\infty} Y_1^{n}(\Theta\ \psi),$$

so erhält man als Lösung unserer zweiten Potentialaufgabe den Ausdruck:

$$V = (\sigma, \Theta)\, n \sum_{o}^{\infty} \frac{\sin \nu\, i\,(\sigma - \sigma_2)}{\sin \nu\, i\,(\sigma_1 - \sigma_2)}\, Y_1^{n}(\Theta\ \psi). \qquad 4'.$$

wenn wieder $\nu = n + \frac{1}{2}$ ist und zwischen den σ Werten die Beziehung besteht.

$$\sigma_2 < \sigma < \sigma_1.$$

II.

Aufsuchen der Funktion w.

Unsere zweite zu lösende Aufgabe (II.) lautet:

Es ist eine Funktion w so zu bestimmen, dass w der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta w$$

Genüge leistet, dass ferner

$$\text{für } t = o \quad w = f(r\,\zeta\,\psi)$$

wird, dass an den Begrenzungsflächen

$$w \text{ übergeht in } w_1 = w_2 = o.$$

Ein sehr naheliegender Weg zur Lösung ist auf den ersten Blick derjenige mit Hülfe der Abbildung nach der Methode der reciproken radii vectores. Aber diese Methode führt hier nicht, wie man leicht sieht, in einfacher Weise zum Ziele. Es bleibt nämlich die Gleichung:

$$\Delta w + \lambda^2 w = o,$$

die in unserem Falle in dem abzubildenden Raume besteht, nach der Abbildung nicht unverändert, sondern geht über*) in:

$$\Delta \mathfrak{w} + \frac{\lambda^2 \mathfrak{w}}{\mathfrak{r}^4} = o,$$

wo der Wert von $\mathfrak{r}$ in den einleitenden Bemerkungen gegeben ist.

Wir versuchen daher einen anderen Weg der Lösung, indem wir in die Bedingungsgleichungen die dipolaren Coordinaten einführen. Mit Hülfe eines von Jakobi**) mitgeteilten Satzes kann man leicht die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta w$$

in die gewünschte Form bringen.

Ist nämlich das Quadrat des Linienelementes für drei ganz beliebige orthogonale Flächensysteme in die Form gebracht:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Theta\, d\theta^2 + \Omega\, d\omega^2 + \Phi\, d\varphi^2,$$

wo im allgemeinen Θ, Ω, Φ Funktionen von θ, ω, φ sind, so lässt sich der Ausdruck

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

sofort transformieren. Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{\Theta \Omega \Phi} = P$, so wird:

$$P \cdot \Delta W = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{P}{\Theta}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{P}{\Omega}\frac{\partial W}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\Phi}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)$$

In den einleitenden Bemerkungen ist aber schon das Quadrat

---

*) Siehe auch: Fr. Pockels, Ueber d. p. Diffgl.: $\Delta u + k^2 u = o$, p. 205, 337.

**) Jakobis mathem. Werke Bd. II. Ueber die part. Differgl.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = o.$$

des Linienelementes durch die dipolaren Coordinaten ausgedrückt worden. Man findet so unmittelbar unter Beachtung des angeführten Satzes von Jakobi für

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta w$$

die transformierte Gleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2}{k^2} \frac{(\sigma, \theta)^6}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sin \theta}{(\sigma, \theta)^2} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{(\sigma, \theta)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin \theta \, (\sigma, \theta)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right| \cdot \qquad 5.$$

wenn wieder:

$$\sqrt{\cos i \, \sigma - \cos \theta} = (\sigma, \theta) \text{ bedeutet.}$$

Führt man nun statt w eine neue Veränderliche w' durch die Substitution ein

$$w = (\sigma, \theta) \cdot w',$$

so hat w' folgender Differentialgleichung zu genügen:

$$\frac{k^2}{(\sigma, \theta)^4 \cdot a^2} \cdot \frac{\partial w'}{\partial t} = \frac{\partial^2 w'}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w'}{\partial \psi^2} - \frac{1}{4} w' \Big| \quad 6.$$

Drückt man nun noch die gegebene Funktion $f(r, \zeta, \psi)$, in welche sich w für $t = o$ verwandeln soll, durch die dipolaren Coordinaten σ, θ, ψ aus, so kann man unsere Aufgabe jetzt folgendermassen darstellen:

Es ist eine Funktion w' der dipolaren Coordinaten σ, θ, ψ zu suchen, die

1. der partiellen Differentialgleichung (6) Genüge leistet,
2. für $t = o$ übergeht in $w' = \dfrac{f'(\sigma \, \theta \, \psi)}{(\sigma, \theta)}$
3. an den Begrenzungsflächen d. h. für σ_1 und σ_2 verschwindet.

Es wird zunächst darauf ankommen, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (6) zu finden.

Zu diesem Ende setzen wir

$$w' = {}_{\lambda}\mathrm{S}\, e^{-a^2 \lambda^2 t} \cdot {}_{\mu}\sum_{o}^{\infty} \left(A_{\mu\lambda} \cos \mu \, \psi + B_{\mu\lambda} \sin \mu \, \psi \right) \Big| \quad 7.$$

Das Zeichen S in dieser Formel deutet eine Summation nach den verschiedenen Werten, welche man λ beilegen kann, an. Der Index λ bei A und B sagt aus, dass auch noch in diesen Funktionen von σ und θ die Constante λ auftreten kann. In der Folge lassen wir diesen Index der Kürze halber fort. Es haben jedenfalls die A_μ und B_μ jetzt folgender Differentialgleichung zu genügen:

$$-\frac{k^2 \cdot \lambda^2}{(\sigma, \theta)^4} A_\mu = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial A_\mu}{\partial \theta} - \left(\frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4}\right) A_\mu \quad | 8.$$

Wir führen folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} p &= k \cdot \lambda \\ S &= \frac{1}{(\sigma, \theta)^2} = \frac{1}{\cos i\sigma - \cos \theta} \\ K^2 &= \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4} \\ \Delta' A_\mu &= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial A_\mu}{\partial \theta}, \end{aligned}\right| \quad 9.$$

so dass wir Gleichung 8 schreiben können

$$-p^2 \cdot S^2 \cdot A_\mu = \Delta' A_\mu - K^2 \cdot A_\mu \quad | 10.$$

Die weitere Auflösung dieser partiellen Differentialgleichung 10 beruht auf der Voraussetzung, die Funktionen A_μ und B_μ in konvergenten, nach aufsteigenden Potenzen von p^2 fortschreitenden Reihen darstellen zu können. Ist diese Voraussetzung für gewisse Werte von $\lambda = \frac{p}{k}$ erfüllt, so dass etwa A_μ gleich folgender konvergenten Reihe ist:

$$A_\mu = R_{\mu o} + p^2 R_{\mu 1} + p^4 R_{\mu 2} + \ldots\ldots + p^{2n} R_{\mu n} + \ldots\ldots \quad | 11.$$

wo die R natürlich Funktionen von σ und θ sind, so muss bei Einsetzung dieses Wertes für A_μ in die Differentialgleichung 10, wenn diese für beliebige Werte von $k = \frac{p}{\lambda}$ befriedigt werden soll,

der Coeffizient jeder Potenz von p^2 verschwinden. So entsteht, falls man wieder die abkürzende Bezeichnung

$$\Delta' R_{\mu n} = \frac{\partial^2 R_{\mu n}}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 R_{\mu n}}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial R_{\mu n}}{\partial \theta}$$

anwendet, folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\Delta' R_{\mu o} - K^2 R_{\mu o} = o \\
&\Delta' R_{\mu 1} - K^2 R_{\mu 1} = -S^2 \cdot R_{\mu o} \\
&\Delta' R_{\mu 2} - K^2 R_{\mu 2} = -S^2 \cdot R_{\mu 1} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Delta' R_{\mu n} - K^2 R_{\mu n} = -S^2 \cdot R_{\mu (n-1)} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man leicht folgende ab:

$$\begin{aligned}
R_{\mu o} &= \frac{\Delta' R_{\mu o}}{K^2} \\
R_{\mu 1} &= \frac{\Delta' R_{\mu 1}}{K^2} + \frac{S^2}{K^4} \Delta' R_{\mu o} \\
R_{\mu 2} &= \frac{\Delta' R_{\mu 2}}{K^2} + \frac{S^2}{K^4} \Delta' R_{\mu 1} + \frac{S^4}{K^6} \Delta' R_{\mu o} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
R_{\mu n} &= \frac{\Delta' R_{\mu n}}{K^2} + \frac{S^2}{K^4} \Delta' R_{\mu (n-1)} + \cdots\cdots + \frac{S^{2n-2}}{K^{2n}} \cdot \Delta' R_{\mu 1} \\
&\qquad + \frac{S^{2n}}{K^{2n+2}} \Delta' R_{\mu o} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad 12.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen 12 mit p^0, die zweite mit p^2, die dritte mit p^4 u. s. f., die $n\,t\,e$ mit p^{2n-2}, addiert dann alle so entstehenden Ausdrücke, beachtet man dann die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\Delta' A_\mu = \Delta' R_{\mu o} + p^2 \cdot \Delta' R_{\mu 1} + p^4 \cdot \Delta' R_{\mu 2} + \cdots\cdots \\
+ p^{2n} \cdot \Delta' R_{\mu n} + \cdots\cdots,
\end{aligned}$$

so erhält man:

$$A_\mu = R_{\mu o} + p^2 R_{\mu 1} + \ldots\ldots\ldots + p^{2n} \cdot R_{\mu n} + \ldots\ldots = \frac{\Delta' A_\mu}{K^2}\left(1 + p^2 \cdot \frac{S^2}{K^2} + p^4 \frac{S^4}{K^4} + \ldots\ldots + p^{2n} \cdot \frac{S^{2n}}{K^{2n}} + \ldots\right), \quad 12'.$$

d. h. es muss sein

$$R_{\mu o} = \frac{\Delta' A_\mu}{K^2} \cdot$$

$$R_{\mu 1} = \frac{\Delta' A_\mu}{K^2} \cdot \frac{S^2}{K^2} = R_{\mu o} \cdot \frac{S^2}{K^2} \cdot$$

$$R_{\mu 2} = \quad = R_{\mu o} \cdot \frac{S^4}{K^4} \cdot \qquad 13.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{\mu n} = \quad = R_{\mu o} \cdot \frac{S^{2n}}{K^{2n}} \cdot$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man:

$$\frac{p^2 \cdot S^2}{K^2} = f$$

so wird aus 12′ bei Beachtung von 13

$$A_\mu = R_{\mu o}(1 + f + f^2 + \ldots) = \frac{R_{\mu o}}{1 - f} \quad 13'.$$

Da $R_{\mu o}$, wie man später sehen wird, einer leicht zu lösenden Differentialgleichung genügen muss, also als bekannt angesehen werden kann, so stellt Gleichung 13′ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung 10 dar, die aber vorläufig nur Geltung hat, wenn die in f enthaltene Grösse λ so beschaffen ist, dass $f < 1$ wird.*) Man kann aber nachweisen, dass dann auch der Ausdruck 13′ allgemein d. h. für jeden Wert von λ eine Lösung der Gleichung 10 sein muss. Zu diesem Ende zeigt man, dass $\Delta' A_\mu = o$ wird, oder, da $\Delta R_{\mu o} = o$ ist, so versucht man $\Delta' A_\mu$ so zu transformieren, dass der Ausdruck bis auf einen Faktor gleich $\Delta R_{\mu o}$ wird.**)

*) Durch eine einfache Convergenzuntersuchung findet man, dass λ folgender Ungleichheit genügen muss: $\lambda \cdot k < \left(\frac{e^{\frac{\sigma_2}{2}} - e^{-\frac{\sigma_2}{2}}}{2}\right)^2$

**) Diese Transformation ist zwar sehr umständlich, im Grossen und Ganzen aber ziemlich leicht bei Beachtung der Gleichungen 9 bis 13′ durchzuführen.

Sobald $R_{\mu o}$ gefunden ist, ist, wie aus dem Vorhergehenden folgt, auch $R_{\mu 1}$, $R_{\mu 2}$ ..... und damit A_μ bekannt. $R_{\mu o}$ findet man aber leicht aus der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 R_{\mu o}}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 R_{\mu o}}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial R_{\mu o}}{\partial \partial} - \left(\frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4} \right) R_{\mu o} = o. \quad | \quad 14.$$

Man setze:

$$R_{\mu \nu} = r \sum_{o}^{\infty} \left(M_{\mu r} \cdot \sin (i r \sigma) + N_{\mu r} \cos (i r \sigma) \right) \cdot \quad | \quad 15.$$

wo $M_{\mu r}$ und $N_{\mu r}$ nur Funktionen von θ sind. Dann haben M und N folgender Differentialgleichung zu genügen:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial M}{\partial \theta} + \left((r - \tfrac{1}{2})(r + \tfrac{1}{2}) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right) M = o, \quad | \quad 15'.$$

deren allgemeines Integral von folgender Form ist:

$$M_{\mu r} = a'_{\mu r} \cdot P_\mu^{r - \frac{1}{2}} (\cos \theta) + b'_{\mu r} Q_\mu^{r - \frac{1}{2}} (\cos \theta) \quad | \quad 16.$$

$P_\mu^{r - \frac{1}{2}} (\cos \theta)$ und $Q_\mu^{r - \frac{1}{2}} (\cos \theta)$ sind Kugelfunktionen erster und zweiter Art, aber nicht, wie gewöhnlich mit einem ganzzahligen oberen Index versehen, sondern mit einem gebrochenen, der die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Man kann für diese Funktionen Reihen und Integraldarstellungen ableiten, die analog denjenigen gebildet sind, die man für Kugelfunktionen mit einer ganzen Zahl als oberen Index erhält. Zwei von diesen Ausdrücken mögen aufgestellt werden. Man entwickle zu diesem Ende die reciproke Entfernung T zweier Punkte mit den dipolaren Coordinaten σ, θ, ψ und τ, η, ω nach Cosinus der Vielfachen von $i(\sigma - \tau)$, wo i die imaginäre Einheit bedeutet, und zugleich nach Kugelfunktionen mit einem gebrochenen oberen Index, der die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. In den einleitenden Bemerkungen sind die den Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und dipolaren Coordinaten bestimmenden Ausdrücke aufgestellt worden. Bei Beachtung derselben findet man:

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta - \cos i(\sigma - \tau)}} \cdot \frac{(\sigma, \theta) \cdot (\tau, \eta)}{i k \cdot \sqrt{2}}.$$

wenn folgende Abbreviaturgleichungen gelten:

$$(\sigma, \theta) = \sqrt{\cos i\sigma - \cos\theta}$$

$$(\tau, \eta) = \sqrt{\cos i\tau - \cos\eta}$$

$$\zeta = \cos\theta \cdot \cos\eta + \sin\theta \cdot \sin\eta \cdot \cos(\psi - \omega).$$

Die oben angegebene Darstellung von T nach Kugelfunktionen und Cosinus der Vielfachen von $i(\sigma - \tau)$ lässt sich nun leicht durch ein Verfahren erreichen, welches Heine in seinem Handbuch der Kugelfunktionen Bd. II bei einer ähnlichen Entwicklung von T in Benützung nimmt. Es lässt sich nämlich mit Hülfe einer bekannten Entwicklung*) von Gauss und einiger Definitionsgleichungen*) und Integraldarstellungen der Kugelfunktionen zweiter Art die reciproke Entfernung T auf folgende Form bringen:

$$T = 2\frac{(\sigma, \theta)(\tau, \eta)}{i k \cdot \pi} \cdot r \sum^{\infty} Q^{r - \frac{1}{2}}_{(\zeta)} \cdot \cos i r(\sigma - \tau)$$

Drückt man nun noch $Q^{r - \frac{1}{2}}_{(\zeta)}$ durch das Heine'sche Additionstheorem für die Kugelfunktionen zweiter Art aus, so erhält man für T die Entwicklung, falls man sich etwa $\eta > \theta$ denkt:

$$T = 2\frac{(\sigma, \theta)(\tau, \eta)}{i k \cdot \pi} \cdot r \sum^{\infty} \frac{\cos i r(\sigma - \tau)}{r} \cdot \mu \sum_{o}^{\infty} P^{r - \frac{1}{2}}_{\mu}(\cos\theta)$$

$$\times\ Q^{r - \frac{1}{2}}_{\mu}(\cos\eta) \cdot \cos\mu(\psi - \omega).^{**})$$

*) Siehe Heine, Hdbch. der Kugelf.
Bd. I. p. 299, 300, 132 u. 224.
Bd. II. p. 286 u. ff.

**) Eine Ableitung des Additionstheorems für Kugelfunktionen mit gebrochenem Index findet man in einer Arbeit von Gegenbauer in den Sitzungs-Berichten d. mathem.-naturw. Classe d. K. Ak. d. W. zu Wien. CII. 942 — 950. 1893.

Die hier erscheinenden Kugelfunktionen $P_\mu^{r-\frac{1}{2}}$ und $Q_\mu^{r-\frac{1}{2}}$ mit einem gebrochenen oberen Index, der die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, sind identisch mit den in Gleichung 16 auftretenden. Bei Benutzung der Formeln, die bei Kugelfunktionen mit ganzzahligem oberen Index statthaben, können die in Frage kommenden Funktionen durch verschiedene Ausdrücke dargestellt werden. Wir wollen, wie schon bemerkt, zwei von diesen aufstellen. Man findet ohne weiteres, wenn man zwei Gleichungen, die Heine in seinem Handbuch Bd. I. p. 207 und p. 224 für Kugelfunktionen erster und zweiter Art mit ganzzahligem oberen Index abgeleitet hat, rein formal auf unsere Funktionen mit gebrochenem oberen Index anwendet, folgende Ausdrücke:

$$P_\mu^{r-\frac{1}{2}}(\cos\Theta) = \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{\pi} \cdot \frac{(\Pi(r-\frac{1}{2}))^2}{\Pi(2r-1)} \cdot \int_o^\pi \frac{\cos\mu\varphi \cdot d\varphi}{(\cos\Theta + i\sin\Theta\cdot\cos\varphi)^{r+\frac{1}{2}}} \quad *)$$

$$Q_\mu^{r-\frac{1}{2}}(\cos\eta) = \qquad 17.$$

$$\frac{1}{2^{r-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Pi(2r)}{(\Pi(r-\frac{1}{2}))^2} \cdot \int_o^{v_o} (\cos\eta - i\sin\eta\cdot\cos iv)^{r-\frac{1}{2}} \cdot \cos i\mu v \cdot dv$$

wo $v_o = \frac{1}{2}\log\frac{\cos\eta+1}{\cos\eta-1}$ ist.

Im Anschluss an Heine**), dem wir bei dieser Entwicklung von T gefolgt sind, können dieselben Funktionen auch noch durch hypergeometrische Reihen dargestellt werden.

Es ist jetzt die Lösung in Bezug auf die Nebenbedingungen zu modifizieren. Wir hatten zu Anfang dieses Abschnittes zwei Aufgaben angeführt.

---

*) Π stellt die bekannte Gauss'sche Π Funktion dar.

**) Heine, Hdbch. d. Kugelf. Bd. II. p. 286 und 287.

Es ist eine Temperatur-Funktion w' zu suchen; die

1. für σ_1 und σ_2 $(\sigma_1 > \sigma_2)$ verschwindet,
2. für $t = 0$ in eine gegebene Funktion übergeht.

Zunächst ist in Bezug auf 1 folgendes evident:

Wenn die Funktion A_μ für σ_1 und σ_2 verschwinden soll, ist es notwendig und hinreichend, dass $R_{\mu o}$ für σ_1 und σ_2 verschwindet. Analoges gilt für die Funktion B_μ, so dass also dadurch für die betrachteten Werte von σ die gesuchte Temperaturfunktion w' zum Verschwinden gebracht ist. $R_{\mu o}$ hatte aber der Gleichung 14, die lautete:

$$\frac{\partial^2 R_{\mu o}}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 R_{\mu o}}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg} \Theta \frac{\partial R_{\mu o}}{\partial \Theta} - \left(\frac{\mu^2}{\sin^2 \Theta} + \frac{1}{4} \right) R_{\mu o} = 0 \qquad 14.$$

Genüge zu leisten. Wir haben also die Funktion $R_{\mu o}$ so zu bestimmen, dass sie der Gleichung 14 genügt und für σ_1 und σ_2 verschwindet, was nur durch passende Festlegung der Constanten r, deren Bedeutung aus 15′ erhellt, geschehen kann.

Wir setzen an:

$$R_{\mu o} = n \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n \pi (\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot \underset{n}{R'}_{\mu o}, \qquad 18.$$

wo $\underset{n}{R'}_{\mu o}$ nur eine Funktion von Θ ist und folgender Gleichung genügen muss:

$$\frac{\partial^2 R'_{\mu o}}{\partial \Theta^2} + \operatorname{cotg} \Theta \frac{\partial R'_{\mu o}}{\partial \Theta} +$$

$$\left(\left(\frac{n \pi i}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{n \pi i}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \Theta} \right) R'_{\mu o} = 0,$$

deren allgemeines Integral, wenn man noch setzt

$$r_1 = \frac{n \pi i}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{1}{2}, \qquad 19.$$

von folgender Form ist:

$$\underset{n}{R'}_{\mu o} = a_{\mu n} \cdot P_{\mu}^{r_1}(\cos\Theta) + b_{\mu n} \cdot Q_{\mu}^{r_1}(\cos\Theta) \qquad | \; 20.$$

Bei der Anwendung dieses betrachteten Wärmeleitungsproblemes wird es im Grossen und Ganzen nicht so sehr auf eine beliebige Lage der excentrischen Kugelflächen ankommen, man wird vielmehr, so bald es irgend angängig ist, durch gewisse die Grössen σ_1 und σ_2 betreffende Voraussetzungen einige Vereinfachungen im Resultat herzustellen suchen. Eine solche tritt zum Beispiel ein, wenn man für σ_1 und σ_2 die beschränkende Annahme macht, dass

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pi \text{ oder } 2\pi,\ 3\pi \text{ u. s. w.} \qquad | \; 18\,a$$

sein soll. Denn dann ist das Resultat unmittelbar durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$R_{\mu o} = r \sum_{1}^{\infty} \sin r \cdot (\sigma_1 - \sigma) \cdot \underset{r}{\overline{R'}}_{\mu o}, \qquad | \; 18'a.$$

wo $\underset{r}{\overline{R'}}_{\mu o}$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \underset{r}{\overline{R'}}_{\mu o}}{\partial \Theta^2} + \operatorname{cotg}\Theta \frac{\partial \underset{r}{\overline{R'}}_{\mu o}}{\partial \Theta} + \left((r\,i - \tfrac{1}{2})(r\,i + \tfrac{1}{2}) - \frac{\mu^2}{\sin^2\Theta} \right) \underset{r}{\overline{R'}}_{\mu o} = 0$$

ist und folgende Form hat:

$$\underset{r}{\overline{R}}_{\mu o} = a'_{\mu r} P_{\mu}^{r\,i - \frac{1}{2}}(\cos\Theta) + b'_{\mu r} Q_{\mu}^{r\,i - \frac{1}{2}}(\cos\Theta) \qquad | \; 18\,b.$$

Auf die Bedeutung der Kugelfunktionen erster und zweiter Art $P_{\mu}^{r_1}$ und $Q_{\mu}^{r_1}$, wenn r_1 durch 19 bestimmt ist, und $P_{\mu}^{r\,i-\frac{1}{2}}$ und $Q_{\mu}^{r\,i-\frac{1}{2}}$, die ja bekanntlich die Kegelfunktionen darstellen, werden wir etwas später zurückkommen.

Etwas Schwierigkeit bietet die Erfüllung der Nebenbedingung 2., die ja besagt, dass sich für $t = 0$ die Funktion w, die Lösung der Differentialgleichung 5., in eine gegebene Funktion $f'(\sigma\,\Theta\,\psi)$, oder die Funktion w', die Lösung von Gleichung 6. in die bekannte Funktion

$$\frac{f'(\sigma, \Theta, \psi)}{(\sigma, \Theta)}$$

verwandelt.

Die Funktion w' ist mit Rücksicht auf die Nebenbedingung 1 gegeben durch folgende Gleichungen:

7, 12′ und 18, 19, 20 oder 18′a, 18 b, je nachdem man σ_1 und σ_2 allgemein lässt oder für dieselben die Beschränkung 18 a festsetzt. w' wird also folgende Form haben:

$$w' = {}_{\lambda}\mathrm{S} e^{-a^2\lambda^2 t} \cdot \left| \mu \sum_{o}^{\infty} U \cdot \left\{ \begin{matrix} n \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\pi(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot R'_{n\,\mu o} \\ r \sum_{1}^{\infty} \sin r(\sigma_1 - \sigma) \cdot \overline{R'}_{r\,\mu o} \end{matrix} \right\} \cdot \cos \mu \psi \right| \quad 12.$$

$$+ \left\{ \right\} \sin \mu \psi \Big| \Big|$$

Die Klammer $\{\}$ bedeutet ein dem vorhergehenden analoges Glied. U stellt den Wert der Summe der konvergenten Reihe 12a dar, die Funktionen $R'_{n\,\mu o}$ und $\overline{R'}_{r\,\mu o}$ sind durch die Ausdrücke 20 und 18b darzustellen. Soll nun w' für $t = 0$ in die bekannte Funktion

$$\frac{f'(\sigma\,\Theta\,\psi)}{(\sigma, \Theta)} \quad 22.$$

übergehen, so muss man diese letztere dementsprechend umformen können. Man entwickele zunächst 22 in eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von ψ fortschreitende Reihe:

$$\frac{f'(\sigma\,\Theta\,\psi)}{(\sigma, \Theta)} = \mu \sum_{o}^{\infty} (q_\mu \cdot \cos \mu \psi + p_\mu \sin \mu \psi) \quad 23.$$

so dass man die von σ und Θ abhängenden Funktionen q_μ und

p_μ als bekannt annehmen kann. Es muss sich nun q_μ folgendermassen darstellen lassen:

$$q_\mu = U \cdot Q_\mu \qquad | \ 24.$$

wo U und Q_μ Funktionen von σ und Θ sind und ausserdem U identisch ist mit der konvergenten Reihe 12a. Für Q_μ ist dann folgender Wert vorgeschrieben:

$$Q_\mu = \begin{cases} n\sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\,\pi\,(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot \overset{n}{P}{}'_{\mu\,o} \\ r\sum_{1}^{\infty} \sin\, r \cdot (\sigma_1 - \sigma) \cdot \overset{r}{\bar{P}}{}'_{\mu\,o} \end{cases} \qquad | \ 25.$$

je nachdem man wieder σ_1 und σ_2 allgemein lässt, oder durch 18a modifiziert. In Bezug auf die Funktionen $\overset{n}{P}{}'_{\mu\,o}$ und $\overset{r}{\bar{P}}{}'_{\mu\,o}$, deren Werte durch 20 und 18b gegeben sind, ist noch eine Bemerkung einzuschalten:

Die dipolaren Coordinaten sind in unserem Falle, bei welchem ja die eine Kugel (m_1) von der andern (m_2) eingeschlossen wird, zu nehmen: σ allgemein von $+\infty$ bis $-\infty$, in unserem speziellen Falle von dem grösseren Werte σ_1 bis zum kleineren σ_2, Θ von 0 bis π, ψ von 0 bis $2\,\pi$. Der Nebenbedingung IV gemäss müssen die Ausdrücke für $\overset{n}{P}{}'_{\mu\,o}$ und $\overset{r}{\bar{P}}{}'_{\mu\,o}$ immer endlich bleiben. Für $\cos\Theta = 1$ wird aber die Kugelfunktion zweiter Art Q unendlich. Es müssen also danach die Coefficienten $b_{\mu n}$ und $b'_{\mu r}$ in den Gleichungen 20 und 18b verschwinden, so dass wir nunmehr für Q_μ den vorgeschriebenen Ausdruck erhalten:

$$Q_\mu = \begin{cases} n\sum_{1}^{\infty} a_{\mu n} \cdot \sin \frac{n\,\pi\,(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot P_\mu^{r_1}(\cos\Theta) \\ r\sum_{1}^{\infty} a'_{\mu n} \cdot \sin r\,(\sigma_1 - \sigma) \cdot P_\mu^{i\,r\,-\frac{1}{2}}(\cos\Theta) \end{cases} \qquad | \ 25'.$$

wo wieder $r_1 = \frac{n\,\pi\,i}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{1}{2}$ ist.

Es wird nun darauf ankommen, die Funktion Q_μ, die man a nach dem Vorhergehenden bestimmen, also als bekannt annehmen kann, so zu entwickeln, dass sie eine mit der rechten Seite von 25′ identische Form erhält. Man stelle zunächst Q_μ durch eine nach Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2}$ oder $(\sigma_1 - \sigma)$ fortschreitende Reihe dar, je nachdem wieder σ_1 und σ_2 allgemein gelassen werden oder in der angegebenen Weise modifiziert sind. Sodann versuche man, die Coeffizienten, welche nur noch die Variable Θ enthalten, nach Kugelfunktionen zu entwickeln und zwar so, dass man zum oberen Index r_1 resp. $ir - \frac{1}{2}$ wählt, dessen Bedeutung aus 25′ erhellt. Die konstanten Faktoren, die bei dieser Entwicklung von Q_μ etwa auftreten, geben dann die Werte an, welche man $a_{\mu n}$ und $a'_{\mu r}$ beilegen muss. Vorausgesetzt, dass die angegebene Entwicklung von Q_μ nach Kugelfunktionen überhaupt möglich ist, kann man die gegebene Funktion $\frac{f'(\sigma\,\Theta\,\psi)}{(\sigma, \Theta)}$ auf folgende Form bringen:

$$\frac{f'(\sigma, \Theta, \psi)}{(\sigma, \Theta)} = \mu \sum_{0}^{\infty} \sum_{r:1-\infty}^{n:1-\infty} {}_\lambda S \left(\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix} \cdot \cos \mu\psi + \begin{matrix} a \\ a' \end{matrix} \sin \mu\psi \right) \cdot U$$

$$\times \begin{matrix} \sin \frac{n\pi(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ \sin \cdot r(\sigma_1 - \sigma) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} P_\mu^{r_1}(\cos\Theta) \\ P_\mu^{ir - \frac{1}{2}}(\cos\Theta) \end{matrix} .$$

Je nachdem man für σ_1 und σ_2 keine Beschränkung zulässt oder festsetzt, dass

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pi, 2\pi, 3\pi \text{ u. s. w.}$$

ist, gilt der obere oder untere Teil der Formel. r_1 hängt mit n durch folgende Gleichung zusammen:

$$r_1 = -\frac{n\pi i}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{1}{2}.$$

Das Zeichen S drückt eine Summation nach den verschiedenen Werten von λ aus. Die gesuchte Temperaturfunktion w', die für σ_1 und σ_2 verschwindet und für $t = o$ in $\frac{f'(\sigma\,\Theta\,\psi)}{(\sigma,\,\Theta)}$ übergeht, ist dann gegeben durch:

$$w' = \mu \sum_{0}^{\infty} \sum_{r:1-\infty}^{n:1-\infty} {}_{\lambda}S \left(\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix} \cdot \cos \mu\, \psi + \begin{matrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}' \end{matrix} \sin \mu\, \psi \right) \cdot U \times \begin{cases} \sin \dfrac{n\,\pi\,(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} & P_{\mu}^{r_1}(\cos\Theta) \\ \sin\, r\,(\sigma_1 - \sigma) & P_{\mu}^{i\,r - \frac{1}{2}}(\cos\Theta) \end{cases} \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t} \qquad 26.$$

Es mögen an dieser Stelle noch einige Erweiterungen und Bemerkungen nachgetragen werden über die Kugelfunktionen erster und zweiter Art

$$P^{r_1}(\cos\Theta),\ Q^{r_1}(\cos\Theta) \text{ und } P^{ni - \frac{1}{2}}(\cos),\ Q^{ni - \frac{1}{2}}(\cos\Theta).$$

r_1 war gegeben durch die Gleichung:

$$r_1 = \frac{n\,\pi\,i}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{1}{2}.$$

Setzt man $\frac{n\,\pi}{\sigma_1 - \sigma_2} = m$, so haben die obigen Ausdrücke der Kugelfunktionen folgende gleiche Form

$$P^{mi - \frac{1}{2}}(\cos\Theta) \text{ und } Q^{mi - \frac{1}{2}}(\cos)$$

Wir beschränken uns auf den allgemeinen Fall.

Wir erhielten die Kugelfunktionen P^{r_1} und Q^{r_1} wenn $r_1 = -\frac{1}{2} + m\,i$ ist, durch die Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\,\Theta^2} + \operatorname{cotg}\Theta \frac{\partial R}{\partial\,\Theta} - \left((m^2 + \tfrac{1}{4}) + \frac{\mu^2}{\sin^2\Theta} \right) R = 0.$$

Bekanntlich stellen nun die Kugelfunktionen erster und zweiter Art P und Q für den komplexen Index $n = -\frac{1}{2} + m\,i$ die zuerst von Herrn Mehler*) eingeführten Kegelfunktionen dar, und zwar auch Kegelfunktionen erster und zweiter Art. Mit Hülfe dieser Funktionen lässt sich dann das Resultat unserer ersten Aufgabe, Gleichung (26), noch etwas anders ausdrücken. Wir gehen zu diesem Ende wieder von unserer partiellen Differentialgleichung (6) aus: Setzen wir:

$$w' = {}_{\lambda}\mathrm{S}\, e^{-a^2\lambda^2 t} \cdot F, \qquad 27.$$

wo F eine Funktion von σ, Θ und ψ bedeutet, gelten dann die Abkürzungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta'' F &= \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} + \operatorname{cotg}\Theta \frac{\partial F}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \\ k_1^2 &= \frac{1}{4} \\ S^2 &= \frac{1}{(\sigma, \Theta)^2} = \frac{1}{\cos i\,\sigma - \cos\Theta} \\ p &= k \cdot \lambda \end{aligned} \qquad 28.$$

so kann man Gleichung 6 in folgender Form schreiben.

$$-p^2 \cdot s^2 F = \Delta'' F - k_1^2 F.$$

Macht man wieder die Annahme, dass die Funktion F sich in die folgende konvengente Reihe entwickeln lässt:

$$F = f_o + p^2 f_1 + p^4 f_2 + \ldots\ldots + p^{2n} f_n + \ldots\ldots, \qquad 30.$$

wo die f Funktionen von σ, Θ und ψ sind, so kann man analoge Schlussfolgerungen und Gleichungen, die wir für die A_μ und $R_{\mu n}$

*) Mehler, Borchardt, Journal f. Math. Bd. 68. Ueber die Verteilung der statischen Elektricität u. s. w. und über eine mit den Kugelf. und Cylinderf. verwandte Funktion u. s. w. Programm, Elbing 1870.
Heine, Hdbch. d. Kugelf. Bd. I. p. 300 und 301.

im Vorhergehenden gebraucht haben, auch hier anwenden. Wir werden schliesslich für die Lösung der partiellen Differentialgleichung 29, folgende Funktion erhalten:

$$F = f_o\left(1 + p^2\frac{s^2}{k_1^2} + p^4\frac{s^4}{k_1^4} + \ldots\right) = f_o\frac{k_1^2}{k_1^2 - p^2 s^2} \quad | \; 31.$$

wo p, k_1^2, s^2 durch 28 bestimmt sind. Einer früheren Entwicklung analog kann auch wiederum der Nachweis erbracht werden, dass 31 eine allgemein gültige Lösung der partiellen Differentialgleichung 29 ist. f_o ist natürlich eine Funktion von σ, Θ und ψ, hat der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f_o}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 f_o}{\partial \Theta^2} + \operatorname{cotg}\Theta\frac{\partial f_o}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f_o}{\partial \psi^2} - \frac{1}{4}f_o = 0 \quad | \; 32.$$

Genüge zu leisten und ist ausserdem so zu bestimmen, dass sie für σ_1 und σ_2 verschwindet. Um nun diese letzte Bedingung zu erfüllen, setze man:

$$f_o = n\sum_{1}^{\infty} \sin\frac{n\pi(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2}\cdot f'_o.$$

f'_o hat dann der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f'_o}{\partial \Theta^2} + \operatorname{co\,tg}\Theta\frac{\partial f'_o}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f'_o}{\partial \psi^2} + \left(mi - \frac{1}{2}\right) + \left(mi + \frac{1}{2}\right)f'_o = 0 \quad | \; 32'.$$

Genüge zu leisten.

Es bedeutet wieder:

$$m = \frac{n\pi}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Der letzten partiellen Differentialgleichung genügt aber bekanntlich die Kugelfunktion P mit dem Index $-\frac{1}{2} + mi$.

Das Integral lautet also:

$$P^{-\frac{1}{2}+mi}(\cos\gamma)$$

wenn:

$$\cos\gamma = \cos\Theta\cdot\cos\eta + \sin\Theta\sin\eta\cos(\psi - \omega) \text{ ist.}$$

Derselben partiellen Differentialgleichung genügt aber auch die von Herrn Mehler zuerst eingeführte, von Heine in seinem Handbuch vielfach erweiternd und ergänzend dargestellte Kegelfunktion. Nach der Mehler'schen Ausdrucksweise setze man:

$$K^m(\cos\gamma) = P^{-\frac{1}{2}+mi}(\cos\gamma).$$

Die Heine'sche Bezeichnungsweise, die mit der Mehler'schen identisch ist, sobald nicht das Argument eine negative reelle Zahl und zugleich absolut grösser als eins ist, was in unserem Falle nicht zutrifft, ist

$$k^m(\cos\gamma) = P^{-\frac{1}{2}+mi}(\cos\gamma) = K^m(\cos\gamma). \qquad | \ 33.$$

Wir hatten nun schon früher die reciproke Entfernung zweier Punkte mit den dipolaren Coordinaten σ, Θ, ψ und τ, η, ω folgendermassen dargestellt:

$$T = \frac{(\sigma, \Theta)(\tau, \eta)}{i\,k \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{z} - \cos i(\sigma - \tau)}}$$

wo

$$\mathfrak{z} = \cos\gamma = \cos\Theta \cdot \cos\eta + \sin\Theta \cdot \sin\eta \cdot \cos(\psi - \omega)$$

war. Mit Rücksicht hierauf kann man das Integral der partiellen Differentialgleichung 32′ ausdrücken durch

$$k^m(\mathfrak{z}).$$

Man kann nun noch für die Kegelfunktion $k^m(\mathfrak{z})$ manigfaltige Integraldarstellungen und Reihenausdrücke ableiten. So zeigt z. B. Heine, dass für jedes Argument x der Kegelfunktion $k^m(x)$ mit Ausnahme der Werte $x = -\cos i\Theta$ d. h. solcher Werte von x, die negativ und grösser als 1 sind, folgender Integralausdruck*) besteht:

$$k^m(x) = K^m(x) = \cos\mu\pi\, i \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\alpha\mu \cdot d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i + x}}$$

Dieser übrigens in speziellen Fällen schon von Herrn Mehler aufgestellte Ausdruck wird nur für $x = -1$ unendlich. $\cos\gamma = z$ kann aber im allgemeinen nicht den Wert -1 annehmen.

*) Heine, Hdbch. d. Kugelf. Bd. II. p. 219 u. ff.

Schliesslich könnte man auch noch eine Transformation der reciproken Entfernung zweier Punkte, der Funktion T, vornehmen, die sich durch eine Summe von partikulären Integralen der partiellen Differentialgleichung 32 ausdrücken liesse.

Es lässt sich also die Lösung unserer Aufgabe, eine Funktion w' zu suchen, die der partiellen Differentialgleichung 6 Genüge leistet, und für σ_1 und σ_2 verschwindet, auch in folgender Form darstellen:

$$w' = {}_{\lambda}\mathrm{S}\, e^{-a^2 \cdot \lambda^2 t} \cdot U' \cdot n \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\,\pi\,(\sigma_1 - \sigma)}{\sigma_1 - \sigma_2} \cdot A_n \cdot k^m \,(3).$$

wo

$$m = \frac{n \cdot \pi}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

$$U' = \frac{k_1^2}{k_1^2 - p^2 \cdot s^2}$$

$$\mathfrak{z} = \cos\Theta \cdot \cos\eta + \sin\Theta \sin\eta \cos(\psi - \omega) \text{ ist.}$$

Soll die Funktion w' für $t = o$ noch in eine gegebene Funktion übergehen, so muss die letztere dementsprechend umgeformt werden können, ganz analog wie wir es vorher angedeutet haben.

Wir haben in den letzten beiden Abschnitten I und II die zwei auf der Seite 14 aufgestellten Aufgaben zu behandeln und zu lösen versucht, und es ist damit das uns gestellte Problem vom theoretischen Standpunkt aus als gelöst zu betrachten. Denn alle mit diesem noch zusammenhängenden Aufgaben lassen sich auf die obigen zwei zurückführen.

Bei beiden in der Einleitung aufgestellten Aufgaben, bei der allgemeinen und speziellen, bei der die äussere Grenzfläche statt mit einer von der Zeit abhängigen, mit einer konstanten von der Zeit unabhängigen Wärmequelle in Berührung steht, haben wir bei möglichst allgemein gelassenen Grenz- und Nebenbedingungen die immerhin etwas komplizierte und umständliche Lösung zu bestimmen versucht. Es ist jedoch klar und leicht zu sehen, dass sich dieselbe bei weiterer Spezialisierung der Grenzbedingungen

bedeutend vereinfachen wird. Diese spezialisierten Lösungen sind es auch, die in der experimentellen Physik einige Bedeutung haben dürften, wo man doch stets, wenn es irgend angängig und zweckdienlich ist, versuchen wird, ja sogar in manchen Fällen genötigt ist, von den einfachsten Voraussetzungen und Annahmen auszugehen. Für das eingangs erwähnte Beispiel der Bestimmung der Wärmeleitungskonstanten der Gasen speziell der Luft wird die mit der äusseren Grenzfläche in Berührung stehende Wärmequelle konstant gleich Null. In Bezug auf die innere Grenzfläche wird die Annahme gemacht, dass auf derselben in jedem Zeitmoment die Temperatur an allen Stellen dieselbe ist, d. h. die Temperatur ist dort nur eine Funktion der Zeit. Macht man schliesslich noch die Voraussetzung, dass zur Zeit $t = o$ innerhalb des von den beiden excentrisch liegenden Kugelflächen eingeschlossenen schalenförmigen Raumes die Temperatur diejenige der innern Grenzfläche, also einen gewissen constanten Wert w_c annehmen soll, so stellt sich die zu lösende Aufgabe folgendermassen dar:

Es ist eine Temperaturfunktion w zu bestimmen, die die Bedingung erfüllt:

$$1.\quad \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta w$$

$$2.\quad w = w_c \text{ für } t = o$$

$$3.\quad w_2 = o,\ w_1 = \varphi(t)^*)$$

Die Indices 1 und 2 beziehen sich, wie früher auf die entsprechenden Grenzflächen. Setzt man $w = u' + v'$ und verteilt die Bedingungen auf u' und v', wie folgt:

$\frac{\partial u'}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u'$	$\frac{\partial v'}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta v'$
$u' = w_c$ für $t = o$	$v' = o$ für $t = o$
$u'_1 = u'_2 = o$	$v'_1 = o,\ v'_2 = \varphi(t)$

*) Anm.: Bei der in der Einleitung erwähnten Aufgabe der Bestimmung der Wärmeleitungskonstanten der Gasen ist die Temperatur w für die innere Grenzfläche streng genommen nicht gegeben, sondern gesucht. Im Anschluss an das in dieser Arbeit durchgeführte Problem machen wir an dieser Stelle die vereinfachende Annahme, dass w_1 bekannt ist.

so ist die Aufgabe u' zu bestimmen, nach dem Vorhergehenden leicht zu lösen. Um v' zu bestimmen, setze man wieder:

$$v' = \int_o^t \frac{\partial w'(t\,\lambda)}{\partial t} \cdot d\lambda,$$

wo w' folgende Bedingungen zu erfüllen hat:

1. $\frac{\partial w'}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta w'$
2. $w' = o$ für $t = o$
3. $w'_1 = \varphi(\lambda)$; $w'_2 = o$

man decomponiert:

$$w' = u + v$$

indem man die Bedingungen, denen w' zu genügen hat, auf u und v folgendermassen verteilt:

$\Delta u = o$	$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v$
$u_1 = \varphi(\lambda)$; $u_2 = o$	$v = -u$ für $t = o$
	$v_1 = o = v_2$

Die Aufgabe, v zu bestimmen, ist identisch mit der ersten, im Abschnitt II. behandelten Aufgabe. Die Aufgabe u zu bestimmen ist identisch mit der Aufgabe, das Potential in dem in Betracht kommenden Raum zu bestimmen, welches an der innern Grenzfläche den konstanten Wert $c = \varphi(\lambda)$, an der äussern Grenzfläche den Wert Null annimmt. Man erkennt, dass diese Aufgabe ein Spezialfall der zweiten, im Abschnitt I. angeführten Aufgabe ist und auch demgemäss leicht bestimmt werden kann, so dass sich dann die Lösung für v' durch folgende Gleichung darstellt:

$$v' = \int_o^t \frac{\partial u}{\partial t} d\lambda + \int_o^t \frac{\partial v}{\partial t} d\lambda.$$

Es möge noch bemerkt werden, dass die auftretenden Potentialaufgaben, deren Lösung wir mit Hülfe der Abbildung nach der Methode der reciproken radii vectores durchgeführt haben, natürlich auch direkt d. h. durch Einführung der dipolaren Coordinaten in die Gleichung $\Delta V = o$ und durch geeignete Bestimmung der Grenzbedingungen für σ_1 und σ_2 behandelt werden können. Es ist eine Potentialfunktion dann so zu bestimmen, dass sie z. B. nach gewissen Umformungen und Substitutionen der Gleichung 14 und ausserdem den jeweils Geltung habenden Grenzbedingungen Genüge leistet. Auf diese Weise hat C. Neumann in seiner schon früher erwähnten Arbeit die Aufgabe der Untersuchung des stationären Temperaturzustandes in einem von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzten homogenen Körper behandelt.

Schliesslich stellen die Lösungen der mathematischen Wärmeleitungsprobleme doch nur eine Annäherung an das entsprechende physikalische Problem dar, so dass die Aufgaben solcher Art, wie die vorliegenden, in erster Linie theoretisches Interesse haben. Auch folgende vom theoretischen Standpunkt höchst interesssante Aufgabe scheint in der experimentellen Physik von keiner Bedeutung zu sein:

> Es ist die Wärmeleitung in unserem schalenförmigen Körper zu untersuchen, wenn die innere Grenzfläche mit einer mit der Zeit veränderlichen Wärmequelle in Berührung steht, die äussere Grenzkugel sich in einem Gas von gegebener Temperatur befindet.

Hier tritt nun für die äussere Grenzfläche die Bedingung auf, wenn T' die gesuchte Temperaturfunktion bedeuten mag,

$$\frac{\partial T_2}{\partial u} + h(T_2 - \varphi_2) = o \qquad \text{a)}$$

wo u die nach aussen gerichtete Normale, h eine positive Constante, das Verhältnis der äusseren zur inneren Leitungsfähigkeit,

die auch von der Zeit abhängende Funktion φ_2 die gegebene Temperatur des Gases bedeutet. Man kann die obige Aufgabe natürlich analog wie vorher auf die Lösung einer Potentialaufgabe und auf die Bestimmung einer Temperaturfunktion zurückführen. Die Lösung der Potentialaufgabe wird man hier am besten direkt ausführen, da die Methode der Abbildung infolge der Grenzbedingungsgleichung von der Form a schwierig sein wird. Die Bestimmung der Temperaturfunktion wird man der ersten Aufgabe des Abschnittes II. analog vornehmen. Freilich wird man beachten müssen, dass für die Grenzfläche 2 die Partialtemperatur, die η heissen möge, folgende Gleichung zu erfüllen hat

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial u} + h\,\eta_2 = o \qquad \text{b.}$$